2 人ババ抜きで勝敗がつくまでにかかる手数の期待値

Hiroaki Igarashi

2023 年 5 月 14 日

1　はじめに

ババ抜きで, 勝敗がつくまでにかかる手数の期待値を求めたいと思いました. プレイヤーが 3 人以上だとあまりに難しいので, 本稿では 2 人の場合を考えます. ジョーカー以外のカードをスートカードと呼びます.

2　ペアを捨て切った状態から

トランプを配る前から考え始めると大変なので, トランプが配られて, 双方ともにペアのカードを捨て切った状態から考えます. 明らかに, 双方のもつスートカードの枚数は等しいので, これを n とします. $n \geq 0$ です. どちらが先手かで期待値も変わってくることが予想されるので, ジョーカーを持っていない方が先手の場合の期待値を $E_1(n)$, ジョーカーを持っている方が先手の場合の期待値を $E_2(n)$ とします. $E_1(0)$ と $E_2(0)$ を便宜的に 0 と定義しておきます. また, 双方ともにスートカードを n 枚持っているとき, ジョーカーを持っていない方がカードを引く状態を $S_1(n)$, ジョーカーを持っている方がカードを引く状態を $S_2(n)$ で表すことにします.

2.1　$E_1(n)$

$E_1(n)$ から考えます.

2.1.1　方法 1

$S_1(n)$ から始めて k 手で勝敗がつく確率を $p_1(n,k)$ とおきます. $p_1(0,0)$ は便宜的に 1 と定義しておきます. このとき,

$$E_1(n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n}^{m} k \cdot p_1(n,k).$$

これを使います. $n=1$ のときは, どちらの番であっても $1/2$ の確率でジョーカーを引いてゲームが続き, $1/2$ の確率でジョーカー以外を引いて勝敗が決まります. よって,

$$p_1(1,k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

したがって,

$$E_1(1)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{2}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\left[2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=2.$$

このような調子で, $E_1(2)$ も比較的容易に求めることができます. しかし, $n\geq 3$ になると途端に難しくなります. まずは $p(n,k)$ の漸化式を立てます. $S_1(n)$ から始めて $1/(n+1)$ の確率でジョーカーを引くと状態は $S_1(n)$ のまま変わらず, 残り $k-1$ 回で勝敗がつく確率は $p_1(n,k-1)$. $S_1(n)$ から始めて $n/(n+1)$ の確率でスートカードを引くと状態は $S_2(n-1)$ になり, 相手は 1 の確率でスートカードを引き, 次の状態は $S_1(n-2)$ になります. ここまで 2 手かかっており, 残り $k-2$ 回で勝敗がつく確率は $p_1(n-2,k-2)$ です. ゆえに

$$p_1(n,k)=\frac{1}{n+1}p_1(n,k-1)+\frac{n}{n+1}p_1(n-2,k-2).$$

$n=3$ のときは, この漸化式と $p_1(1,k)$ を使うことで何とか求めることができますが, かなり長大な計算を要します. 漸化式にしたがって計算すると次のようになります.

$$\begin{aligned}p_1(3,k)&=\frac{3}{4}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{k-3}p_1(1,1)+\left(\frac{1}{4}\right)^{k-4}p_1(1,2)+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{0}p_1(1,k-2)\right\}\\&=\frac{3}{4}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-5}\right\}\\&=\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}-\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}\right\}.\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}E_1(3)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=3}^{n}k\cdot p(3,k)\\&=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=3}^{n}\left\{2k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-4k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\right\}\\&=\frac{13}{3}.\end{aligned}$$

$n=4$ の場合も同様に求めることができます. しかしながら, n が大きくなるにつれて再帰の回数が増えていき, 段々と手に負えなくなっていきます. おまけに, 今は 一般の n で $p_1(n,k)$ を求めたいわけで, そうなると規則性を見出すことは非常に困難です. というわけで, 私は $p_1(n,k)$ を使って $E_1(n)$ を求める方法は諦めました.

2.1.2 方法 2

$E_1(n)$ を $p(n,k)$ を使わずに求める方法を考えます．とはいえ, $p(n,k)$ の漸化式を立てるときと類似しています．例として $n=5$ の場合を考えます．$S_1(5)$ から始めます．最初は双方ともに 1/6 の確率でジョーカーを引き続けたとすると, 状態は $S_1(5)$ のままです．ここで, 一方が相手から 5/6 の確率でスートカードを引くと状態は $S_2(4)$ に移ります．その後, 今度はもう一方が 1 の確率でスートカードを引くと状態は $S_1(3)$ に移ります．さらにこの後, 今度は双方ともに 1/4 の確率でジョーカーを引き続けたとして, 以下同様です．状態が $S_1(1)$ になった後, 一方が 1/2 の確率でスートカードを引いたときに勝敗が決まります．1/6 の確率でジョーカーを引き続ける回数を k_1, 1/4 の確率でジョーカーを引き続ける回数を k_2, 1/2 の確率でジョーカーを引き続ける回数を k_3 とすると, この場合は $k_1+2+k_2+2+k_3+1=k_1+k_2+k_3+5$ 回の手数がかかっているので,

$$E_1(5)=\lim_{n_1\to\infty}\lim_{n_2\to\infty}\lim_{n_3\to\infty}\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\sum_{k_3=0}^{n_3}\left(\frac{1}{6}\right)^{k_1}\cdot\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k_2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k_3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(k_1+k_2+k_3+5).$$

簡単のため, 1/6, 1/4, 1/2 をそれぞれ r_1, r_2, r_3 とおき, k_1, k_2, k_3 の範囲を 0 からではなく 1 からに変換すると,

$$E_1(5)=\lim_{n_1\to\infty}\lim_{n_2\to\infty}\lim_{n_3\to\infty}\sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2}\sum_{k_3=1}^{n_3}(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3){r_1}^{k_1-1}{r_2}^{k_2-1}{r_3}^{k_3-1}(k_1+k_2+k_3+2).$$

この lim の中身を具体的に計算するのはものすごく大変です．私は $n=3$ の場合をやってみましたが, それでも非常に込み入った計算をする羽目になりました．$n>3$ の場合を実際に計算しようなどという気は起こりませんでした．しかしながら, 極限をとるときに ${r_i}^{k_i}$ との積からなる項は全て 0 になるので, このことを考慮すると例えば次のように計算することができます．

$$\begin{aligned}
&\lim_{n_1\to\infty}\lim_{n_2\to\infty}\lim_{n_3\to\infty}\sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2}\sum_{k_3=1}^{n_3}k_1{r_1}^{k_1-1}{r_2}^{k_2-1}{r_3}^{k_3-1}\\
&=\lim_{n_1\to\infty}\sum_{k_1=1}^{n_1}k_1{r_1}^{k_1-1}\lim_{n_2\to\infty}\sum_{k_2=1}^{n_2}{r_2}^{k_2-1}\lim_{n_3\to\infty}\sum_{k_3=1}^{n_3}{r_3}^{k_3-1}\\
&=\lim_{n_1\to\infty}\frac{1}{1-r_1}\left(\frac{1-{r_1}^{n_1}}{1-r_1}-n_1{r_1}^{n_1}\right)\lim_{n_2\to\infty}\frac{1-{r_2}^{n_2}}{1-r_2}\lim_{n_3\to\infty}\frac{1-{r_3}^{n_3}}{1-r_3}\\
&=\frac{1}{(1-r_1)^2}\frac{1}{1-r_2}\frac{1}{1-r_3}.
\end{aligned}$$

このことを用いてさらにごにょごにょと計算すると, 因数分解できたり, 一部が約分して消えたりして, かなりすっきりします．

$$E_1(5)=\frac{1}{1-r_1}+\frac{1}{1-r_2}+\frac{1}{1-r_3}+2.$$

このことを一般化すると, $n=2k-1$ のとき, $r_i=1/2i$ として, 次が成り立つことが分かります．

$$E_1(n)=\frac{1}{1-r_1}+\frac{1}{1-r_2}+\cdots+\frac{1}{1-r_k}+k-1.$$

n が偶数のときは各 r_i が若干異なりますが, やはり, 上記の式と同様の結果が得られます. そこで, n が奇数の場合と偶数の場合とで各 r_i の値を代入して具体的に計算すると, 次を得ます.

$$E_1(n) = \begin{cases} n + \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{n} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ n + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \cdots + \dfrac{1}{n} & (n \text{ が偶数のとき}). \end{cases}$$

とても綺麗な結果が得られました.

2.2　$E_2(n)$

$E_2(n)$ は $E_1(n)$ から求めることができます. $S_2(n)$ から始めます. 先手は 1 の確率でスートカードを引き, 状態は $S_1(n-1)$ に移ります. したがって, 以後, 勝敗が決まるまでの手数の期待値は $E_1(n-1)$ です. ゆえに,

$$E_2(n) = 1 + E_1(n-1).$$

したがって,

$$E_2(n) = \begin{cases} n + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \cdots + \dfrac{1}{n-1} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ n + \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{n-1} & (n \text{ が偶数のとき}). \end{cases}$$

これも綺麗ですね.

2.3　$E_1(n)$ と $E_2(n)$

$E_1(n)$ と $E_2(n)$ から, 双方ともにスートカードを n 枚持っている場合の勝敗がつくまでの手数の期待値 $E(n)$ を求めることができます. どちらが先手になる確率も等しく $1/2$ とすると, 実は n の偶奇によらず次を得ます.

$$\begin{aligned} E(n) &= \frac{1}{2}E_1(n) + \frac{1}{2}E_2(n) \\ &= n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

まさかこんなに綺麗な形になるとは驚きです. 念のため, プログラムを書いて各 n についてババ抜きを 10 万回ずつ試行してみたところ, 理論通りの結果が得られました. 以下は各 n についての $E(n)$ の近似値です.

n	$E(n)$
0	0.0
1	1.5
2	2.75
3	3.91667
4	5.04167
5	6.14167
6	7.225
7	8.29643
8	9.35893
9	10.4145
10	11.4645
11	12.5099
12	13.5516
13	14.5901

ところで, $E_1(n)$ と $E_2(n)$ を求めることなしに (1) を導く方法を思いついたので, これも書いておきます. 期待値についての漸化式を立てます. まず, $S_1(n)$ から始める場合を考えます. この場合, $1/(n+1)$ の確率で状態は $S_1(n)$ のまま変わらず, $n/(n+1)$ の確率で状態は $S_2(n-1)$ に変化するので, 次が成り立ちます.

$$E_1(n) = \frac{1}{n+1}\left\{1 + E_1(n)\right\} + \frac{n}{n+1}\left\{1 + E_2(n-1)\right\}.$$

整理すると次を得ます.

$$E_1(n) = E_2(n-1) + 1 + \frac{1}{n}. \tag{2}$$

次に, $S_2(n)$ から始める場合を考えます. この場合, 1 の確率で状態が $S_1(n-1)$ に変化するので, 次が成り立ちます.

$$E_2(n) = 1 + E_1(n-1). \tag{3}$$

(2), (3) より, $n \geq 2$ のとき,

$$E(n) = \frac{1}{2}\left\{E_1(n) + E_2(n)\right\} = \frac{1}{2}\left\{E_1(n-1) + E_2(n-1)\right\} + 1 + \frac{1}{2n}.$$

また, 前述の通り $E_1(1) = 2$ であり, 明らかに $E_2(1) = 1$ なので, $E(1) = 3/2$ です. これらのことから帰納的に考えて (1) を得ることができます. また, (1), (2) から $E_2(n)$ を消去すると $E_1(n)$ の漸化式が得られ, $E_1(n)$ を消去すると $E_2(n)$ の漸化式が得られるので, それらから $E_1(n)$, $E_2(n)$ を個別に求めることもできます. なお, $E_1(0) = E_2(0)$ と定義したおかげで, 上の漸化式は実は $n \geq 1$ のときにも成り立ちます.

3　カードが配られた状態から

前節で, 双方ともにスートカードを n 枚持っている場合の勝敗がつくまでの手数の期待値 $E(n)$ を求めました. しかし, この n はカードの配られ方により, それぞれの確率で 0 から 13 の値を取ります. そこで, 本節では場にカードが配られた状態から始めて, m 枚のスートカードからペアを捨て切って n 枚のカードが残る場合の数 $R(m,n)$ を求めていきたいと思います. 同じ数のカードが i 枚ある数が k_i 種類あるとします $(i=0,1,2,3,4)$. 例えば, 4, 7, 9, 12 だけ各 3 枚ずつあるとすると, $i=3$, $k_3=4$ です. $i=2,3$ のときはペアになって捨てるカードがそれぞれ $2k_2$, $2k_3$ 枚あり, $i=4$ のときはペアになって捨てるカードが $4k_4$ 枚あります. 場にカードが配られたとき, ジョーカーを含まない 26 枚とジョーカーを含む 27 枚の組み合わせになる場合 (A) と, ジョーカーを含む 26 枚とジョーカーを含まない 27 枚の組み合わせになる場合 (B) があります. したがって, $m=25,26,27$ であり, 最終的に残るカードは $n=m-2k_2-2k_3-4k_4$ 枚です. k_1, k_2, k_3, k_4 の満たすべき関係式は以下です.

$$k_1+k_2+k_3+k_4 \le 13. \tag{4}$$

$$k_1+2k_2+3k_3+4k_4 = m. \tag{5}$$

各 k_1, k_2, k_3, k_4 に対し, 対応する配り方の総数を $C(k_1,k_2,k_3,k_4)$ とします. 同じカードが 4 枚ある数の選び方が $\binom{13}{k_4}$ 通りあり, その各々に対してスートカードの選び方が $\binom{4}{4}^{k_4}$ 通りあります. さらに, その各々に対して同じカードが 3 枚ある数の選び方が $\binom{13-k_4}{k_3}$ 通りあり, その各々に対してスートカードの選び方が $\binom{4}{3}^{k_3}$ 通りあります. 以下, 同様です. したがって,

$$\begin{aligned} C(k_1,k_2,k_3,k_4) &= \binom{13}{k_4}\binom{4}{4}^{k_4}\binom{13-k_4}{k_3}\binom{4}{3}^{k_3}\binom{13-k_4-k_3}{k_2}\binom{4}{2}^{k_2}\binom{13-k_4-k_3-k_2}{k_1}\binom{4}{1}^{k_1} \\ &= 4^{k_1+k_3}6^{k_2}\binom{13}{k_4}\binom{13-k_4}{k_3}\binom{13-k_4-k_3}{k_2}\binom{13-k_4-k_3-k_2}{k_1}. \end{aligned}$$

$R(m,n)$ は $n=m-2k_2-2k_3-4k_4$ を満たす全ての組 (k_1,k_2,k_3,k_4) についての $C(k_1,k_2,k_3,k_4)$ の和をとったものになります. 私は試しに $m=26$ の場合について (5) を満たす組 (k_1,k_2,k_3,k_4) を手計算で求めてみました. すると, 206 通りもありました. ここからさらに (4) を満たすものだけを抽出するわけですが, やる気が失せました. その上, それら全ての組に対して $C(k_1,k_2,k_3,k_4)$ を計算して和をとるなどというのは, 全く気の遠くなる作業です. そこで, $R(m,n)$ を自動で計算するプログラムを書いて実行しました. 結果は次のようになりました.

n	$R(26,n)$	$R(25,n)$
0	123213933576	0
1	0	1533895724400
2	9552905571456	0
3	0	33590200740096
4	87096437176320	0
5	0	150502741069824
6	207986511642624	0
7	0	199848950366208
8	155256906055680	0
9	0	82945457520640
10	34347914625024	0
11	0	9014775644160
12	1554643943424	0
13	0	115158810624
計	495918532948104	477551179875952

$m = 27$ の場合は $m = 25$ の場合と同じ結果になります．というのも，一方のスートカードが 25 枚ならばもう一方のスートカードは 27 枚であり，その逆も成り立ち，ペアを捨て切った後のスートカードの枚数は双方ともに等しくなるからです．また，m の偶奇によって 0 が互い違いに現れるのは，ペアとして捨てるカードが常に偶数枚だからです．ちなみに，計の欄にある数は，それぞれ $\binom{52}{26}$, $\binom{52}{27}$ or $\binom{52}{25}$ に一致しており，計算が正しいことが確かめられます．これらを足すと 973469712824056 になり，これが 2 人ババ抜きにおいて配られるカードの組み合わせの総数です．さて，(A) になる確率は 27/53, (B) になる確率は 26/53 なので，ペアを捨て切った際にスートカードが n 枚になる確率 $q(n)$ は以下で求められます．

$$q(n) = \frac{27}{53} \cdot \frac{R(26,n)}{\binom{52}{26}} + \frac{26}{53} \cdot \frac{R(25,n)}{\binom{52}{25}}.$$

各 n についての結果をまとめると，次のようになります．

n	$q(n)$	%
0	15401741697/121683714103007	0.0126572
1	5182080150/3288749029811	0.15757
2	1194113196432/121683714103007	0.981325
3	13949418912/404264830907	3.45056
4	10887054647040/121683714103007	8.94701
5	20879958528/135054066707	15.4604
6	25998313955328/121683714103007	21.3655
7	24981118795776/121683714103007	20.5295
8	19407113256960/121683714103007	15.9488
9	10368182190080/121683714103007	8.5206
10	613355618304/17383387729001	3.5284
11	1126846955520/121683714103007	0.926046
12	194330492928/121683714103007	0.159701
13	14394851328/121683714103007	0.0118297

ついでながら, ペアを捨て切った際のスートカードの枚数の期待値を求めてみたところ, 次を得ました.

$$\sum_{n=0}^{13} nq(n) = \frac{5850}{901} \approx 6.49279.$$

ジョーカーまで含むのであれば, これに 0.5 を足します.

4　手数の期待値

いよいよ, 2 人ババ抜きで勝敗がつくまでにかかる手数の期待値を求めます. 以下の式で求められます.

$$\sum_{n=0}^{13} q(n)E(n).$$

結果は,

$$\frac{42359022377877221}{5475767134635315} \approx 7.73572.$$

5　おわりに

いかがでしたか？個人的には, $E(n)$ を求めるのに色々な考え方ができるのが楽しかったです. $p_1(n,k)$ を求めることができなかったのが心残りです. どなたか挑戦してみては.

五十嵐の次回作にご期待ください.